1. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME TEKNİĞİ

X rastgele değişkeninin aldığı değerler kümesi reel sayıların sayılabilen bir alt kümesi ise X' e kesikli rastgele değişken, reel sayıların sayılamayan bir alt kümesi ise X' e sürekli rastgele değişken denir. Bir zarın atılması, bir markete gelen müşteri sayısı vb. örnekler kesikli rastgele değişken örnekleridir. Bir ampül bozuluncaya kadar geçen süre, bir kişinin boy uzunluğu vb. örnekler ise sürekli rastgele değişken örnekleridir.

Tek Değişken olması durumunda:

- Kesikli bir X rastgele değişkeni ile X' in bir fonksiyonu olan $Y = g(X)$ olarak tanımlanan rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu, X' in olasılık fonksiyonu ve $X=g^{-1}(Y)$ şeklindeki ters fonksiyonlardan yararlanılarak aşağıdaki genel ifade yardımıyla bulunur:

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)=P(X=g^{-1}(y))$$

- Sürekli bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) olsun. g fonksiyonu artan yada azalan sürekli bir fonksiyon ve g^{-1} türevlenebilirse $Y = g(X)$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

şeklinde bulunur.

Çok Değişken olması durumunda:

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ herhangi rastgele değişkenler ve bunların ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olsun.

$$Y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$Y_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_n = g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

dönüşüm değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarına $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ile gösterilirse, bu fonksiyon aşağıdaki algoritma ile bulunabilir:

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$>0 olduğu bölge A ile gösterilsin.

$$A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); -\infty < x_i < \infty, i = 1,2, \cdots, n\}$$

- Verilen dönüşümler A bölgesini bir tek B bölgesine dönüştürür. B bölgesinde $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$>0 olacaktır.

$B =$

$\{(y_1, y_2, \cdots, y_n);$ y_i'lerin tanım aralıkları dönüşümlerden yararlanılarak bulunur.$\}$

- Ters dönüşümler ve gerekiyorsa Jakobiyen hesaplanır. Verilen dönüşümlerden yararlanılarak ters dönüşümler bulunur.

$$x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$x_2 = w_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

Jakobiyen matrisi (sürekli olduğu durumda gereklidir)

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ rastgele değişkenlerinin B bölgesinde tanımlı olan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y_1, \cdots, y_n)=\begin{cases} f\big(x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)\big) & , \ kesikli \\ f\big(x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)\big).|J| & , \ sürekli \end{cases}$$

Örnek: X rastgele değişkeni olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \begin{cases} pq^{x-1} & , \quad x = 1,2,3, \cdots \\ 0 & , diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olan p parametreli Geometrik dağılıma sahip olsun. Y=X-1 rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

Çözüm: X rastgele değişkeninin tanım kümesinden Y=X-1 dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir.

$$D_X=\{1,2,3,\cdots\} \xrightarrow{Y=X-1} D_Y=\{0,1,2,\cdots\}$$

y=x-1 dönüşümü verildiğine göre ters dönüşümden x=y+1 elde edilir.

O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(Y=y)=\begin{cases} pq^y\ , & y=0,1,2,\cdots \\ 0\ , & diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeni olasılık fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases} \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} & , \quad x=0,1,2,3,4 \\ 0 & , diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olan Binom(n=4, p=1/2) dağılımına sahip olsun.

a) Y= $\frac{1}{1+X}$ rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

b) $Y=(X-2)^2$ rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

a) P(X=x)>0 olduğu bölge için X rastgele değişkeninin tanım kümesinden Y= $\frac{1}{1+X}$ dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir. Yani verilen dönüşüm D_X bölgesini D_Y bölgesine dönüştürür. D_Y bölgesi için de P(Y=y)>0 olacaktır.

$$D_X=\{0,1,2,3,4\} \xrightarrow{Y=\frac{1}{1+X}} D_Y=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$$

y= $\frac{1}{1+x}$ dönüşümü verildiğine göre ters dönüşümden x=$\frac{1-y}{y}$ elde edilir.

O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(Y=y)=\begin{cases}\binom{4}{\frac{1-y}{y}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-y}{y}}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{1-y}{y}} & , \quad y=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\\ 0 & , diğer\ yerlerde\end{cases}$$

olarak elde edilir.

b) P(X=x)>0 olduğu bölge için X rastgele değişkeninin tanım kümesinden $Y=(X-2)^2$ dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir. Yani verilen dönüşüm D_X bölgesini D_Y bölgesine dönüştürür. D_Y bölgesi için de P(Y=y)>0 olacaktır.

$$D_X=\{0,1,2,3,4\} \xrightarrow{Y=(X-2)^2} D_Y=\{0,1,4\}$$

y=0 ise $P(Y=0)=P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{3}{8}$

y=1 ise $P(Y=1)=P(X=1)+P(X=3)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{8}$

y=4 ise $P(Y=4)=P(X=0)+P(X=4)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

Y=y	0	1	4
P (X=x)	3/8	4/8	1/8

olarak elde edilir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.